الرياضيات

الهندسة

الصف التاسع

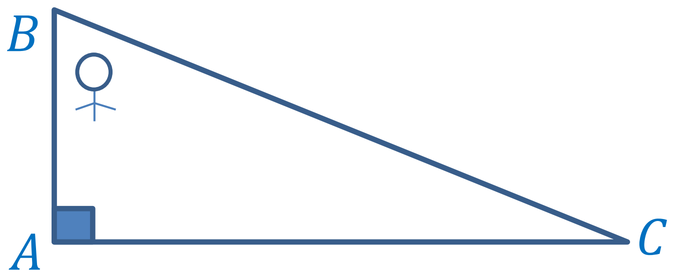
إعداد م.أنس الشعار

الوحدة الأولى

النسب المثلثية لزاوية حادة

انطلاقة نشطة صفحة 3:

في كل مما يأتي واحدة فقط من الإجابات الثلاث المقترحة صحيحة أشر إليها:



- في الشكل المثلث BAC قائم في A وتر هذا المثلث هو:

$[AB]$, $[AC]$, $[BC]$

في المثلث القائم الوتر هو الضلع المقابلة للزاوية القائمة.

- الضلع المقابلة للزاوية $\hat{B}$ هي:

$[AB]$, $[AC]$, $[BC]$

لو تخيلنا إنسانا واقفاً عند B لكان سيرى أمامه الضلع $[AC]$

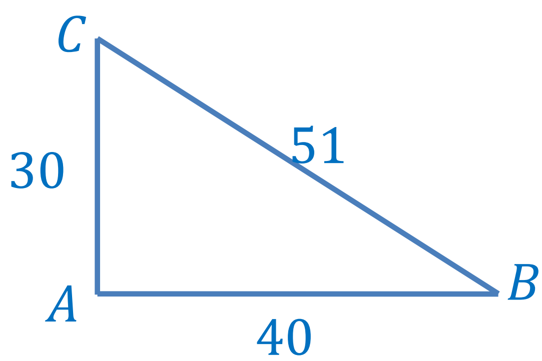
- الضلع المجاورة للزاوية $\hat{B}$ هي:

$[AB]$, $[AC]$, $[BC]$

لو تخيلنا إنسانا واقفاً عند B لكان بجانبه الضلعان الضلع $[AB]$ و $[BC]$ لكن الأخيرة هي الوتر فهي ليست المجاورة إنما المجاورة هي الأولى.

- مثلث قائم:

أي المثلثات الآتية غير قائم:



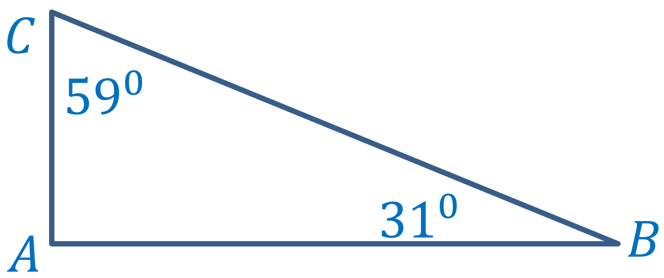
لو حاولنا تطبيق النظرية العكس لنظرية فيثاغورث:

$$40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$$

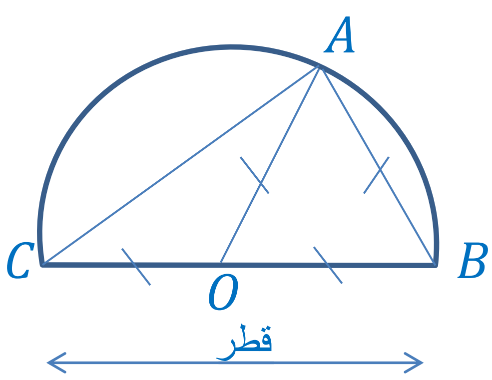
$$51^2 = 2601$$

أي لا تتحقق النظرية العكس لنظرية فيثاغورث (و التي تنص على أنه إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي الضلعين الباقيين كان المثلث قائماً و تره تلك الضلع)

أي هذا المثلث ليس قائماً.



مجموع زوايا أي مثلث 180^0 و بالتالي سيكون قياس الزاوية $\hat{A}$ تسعون درجة أي المثلث قائم



الزاوية المحيطية (أي التي يقع رأسها على محيط الدائرة) و التي تحصر قوس نصف الدائرة تكون قائمة

بالتالي في الشكل $C\hat{A}B$ زاوية قائمة أي المثلث ABC قائم.

- حساب مجهول

لحساب x من العلاقة $\frac{1}{7} = \frac{x}{5}$ يمكن أن نكتب:

$$x = 5 \times 7$$

$$x = \frac{5}{7} \quad \text{إذن} \quad 7x = 5$$

$$x = 5 - 7 \quad \text{إذن} \quad 5 = 7x$$

حيث نجري عملية الضرب التقاطعي على التناسب ثم نقسم الطرفين على 7.

تحقق من فهمك صفحة 6:

- إذا كان $\frac{b}{3} = \frac{a}{2}$ و كان $a + b = 15$ فاحسب كلاً من b و a.

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{2}a$$

$$a + b = 15$$

$$a + \frac{3}{2}a = 15$$

$$\frac{5}{2}a = 15 \Rightarrow \quad a = \frac{15 \times 2}{5} = 6$$

و بالتالي $b = 9$

و $a = 6$

لأن مجموعهما 15

- جد عددين موجبين مجموعهما 27 و نسبتهما $\frac{1}{2}$

إن كان العدد الأول (الصغير) x فالثاني $2x$

$$x + 2x = 27$$

$$3x = 27 \implies x = 9$$

و العدد الثاني 18.

تدرب صفحة 6:

- ABC مثلث فيه $\widehat{C} = 110^0$ و $\frac{\widehat{A}}{\widehat{B}} = \frac{3}{4}$ احسب قياس كل من الزاويتين A و B.

$$\frac{\widehat{A}}{\widehat{B}} = \frac{3}{4} \implies \widehat{A} = \frac{3}{4}\widehat{B}$$

مجموع زوايا أي مثلث 180^0 و بالتالي

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 70^0$$

$$\frac{3}{4}\widehat{B} + \widehat{B} = 70^0$$

$$\frac{7}{4}\widehat{B} = 70^0 \implies \widehat{B} = \frac{70^0 \times 4}{7} = 40^0$$

$$\widehat{A} = 30^0$$

- جد عددين موجبين فرقهما 28 و نسبتهما $\frac{12}{5}$

بفرض العدد الصغير x سيكون العدد الكبير $28 - x$ و سيكون:

$$\frac{28 - x}{x} = \frac{12}{5}$$

باستخدام خاصية الضرب التقاطعي:

$$12x = 140 - 5x$$

$$17x = 140$$

$$x = \frac{140}{17}$$ العدد الصغير

و العدد الكبير سيكون :

$$28 - \frac{140}{17} = \frac{476}{17} - \frac{140}{17} = \frac{336}{17}$$

- يزيد عمر سارة على عمر سلمى بمقدار أربع سنوات فإذا كانت نسبة عمريهما $\frac{3}{5}$ فاحسب عمر كل منهما.

إن كان عمر سلمى x سيكون عمر سارة $x + 4$

$$\frac{x}{x + 4} = \frac{3}{5}$$

و باستخدام خاصية الضرب التقاطعي:

$$5x = 3x + 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

عمر سلمى 6 سنوات و عمر سارة 10 سنة.

- لدى صبا لعبة مكعبات فيها 30 مكعباً ملوناً بالأصفر و الأحمر و نسبة المكعبات الصفراء إلى الحمراء $\frac{3}{2}$ احسب عدد كل من المكعبات الصفراء و الحمراء.

إن كان عدد المكعبات الحمراء x سيكون عدد المركبات الصفراء $30 - x$

و سيكون:

$$\frac{3}{2} = \frac{30 - x}{x}$$

باستخدام خاصية الضرب التقاطعي:

$$3x = 60 - 2x$$

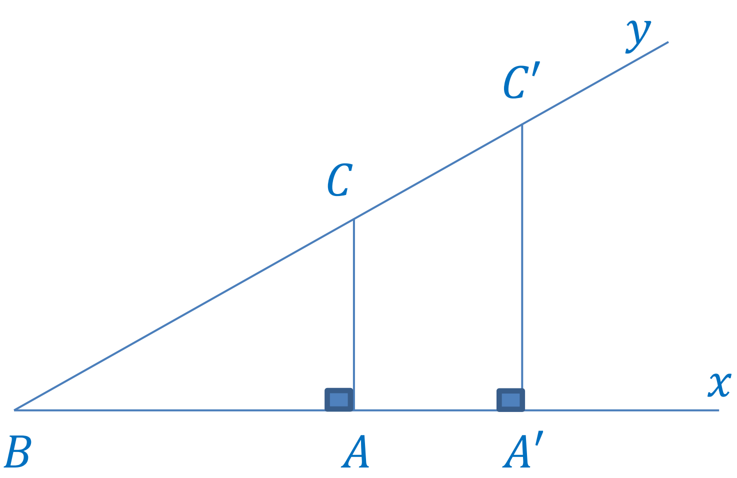
$$5x = 60$$

$$x = \frac{60}{5} = 12$$

يوجد 12 مكعباً أحمر و 18 مكعباً أصفر.

النسب المثلثية لزاوية حادة:

نشاط صفحة 7:



مثلثات قائمة مشتركة بزاوية حادة:

المثلثان BAC و $BA'C'$

قائمان في A و A'

و يشتركان بالزاوية الحادة $\widehat{B}$

- اشرح لماذا:

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{BA'}$$

المستقيمان (AC) و $(A'C')$ متوازيان لأنهما يعامدان المستقيم (BA)
و بالتالي المثلثان BAC و $BA'C'$ متشابهان و حسب نسب التشابه يكون:

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{BA'}$$

- علل لماذا :

$$AC \times BC' = A'C' \times BC$$

ثم استنتج أن

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'}$$

من التناسب السابق

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$$

و حسب خاصية الضرب التقاطعي نجد:

$$AC \times BC' = A'C' \times BC$$

و لو قسمنا الطرفين على

$$BC \times BC'$$

لوجدنا أن:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'}$$

- علل لماذا :

$$BC \times BA' = BC' \times BA$$

ثم استنتج أن

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'}$$

من التناسب السابق

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{BA}{BA'}$$

و حسب خاصية الضرب التقاطعي نجد:

$$BC \times BA' = BC' \times BA$$

و لو قسمنا الطرفين على

$$BC \times B\,C'$$

لوجدنا أن:

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{AB}{BC}$$

أو

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'}$$

- استنتج أيضاً أن

$$\frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'}$$

من التناسب السابق

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{BA'}$$

و حسب خاصية الضرب التقاطعي نجد:

$$AC \times BA' = BA \times A'C'$$

و لو قسمنا الطرفين على

$$BA \times B\,A'$$

لوجدنا أن:

$$\frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'}$$

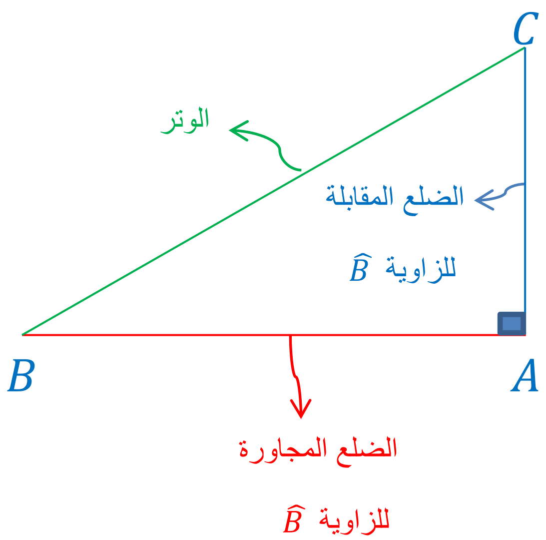
....

$$BA = AB$$
$$CA = AC$$

و هكذا...

في مثلث قائم:

$\widehat{B}$ زاوية حادة في مثلث قائم . انسخ و أكمل باستعمال العبارات المدونة على الشكل المرافق :



$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{BA}$$

- بقطع النظر عن قياس الزاوية $\widehat{B}$ اشرح:

لماذا $\sin \widehat{B}$ و $\tan \widehat{B}$ عددان موجبان تماماً؟

لأن كل منهما عبارة عن قسمة طول ضلع على طول ضلع آخر من مثلث أي عبارة عن قسمة عدد موجب تماماً على عدد آخر موجب تماماً.

و كذلك هو $\cos \widehat{B}$.

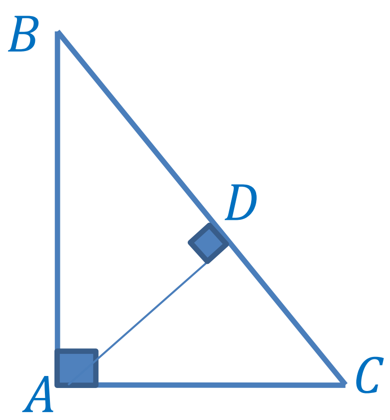
لماذا $\sin \widehat{B} < 1$ و $\cos \widehat{B} < 1$ ؟

كلاهما حاصل قسمة طول ضلع قائمة في مثلث قائم على طول الوتر و الضلع القائمة طولها غير معدوم و أصغر من طول الوتر.

تحقق من فهمك صفحة 9:

في الشكل المرافق ABC مثلث قائم في A

، فيه $[AD]$ ارتفاع



عبر عن $\sin\hat{B}$ في المثلث ADB

ثم في المثلث BAC

$$\sin\hat{B} = \frac{AD}{AB}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

إذا كانت $\frac{2}{3} = \frac{AC}{BC}$ استنتج النسبة $\frac{AD}{AB}$

حسب الطلب السابق يكون:

$$\sin\hat{B} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$$

عبر عن $\cos\hat{C}$ في المثلث ACD ثم في المثلث BAC

$$\cos\hat{C} = \frac{CD}{AC}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

إذا كانت $\frac{2}{3} = \frac{AC}{BC}$ استنتج النسبة $\frac{CD}{AC}$

حسب الطلب السابق :

$$\cos \hat{C} = \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$$

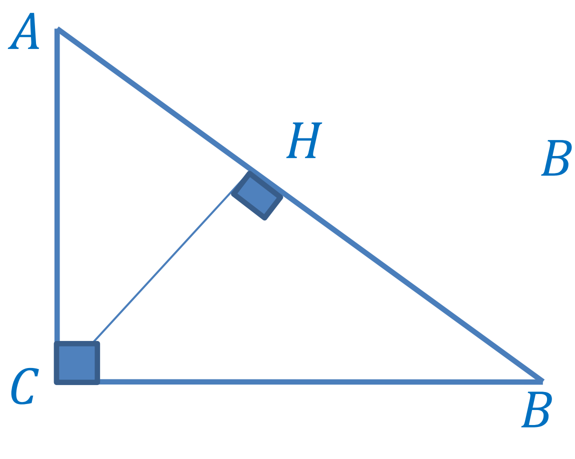
عبر عن $\tan \hat{B}$ في المثلث ADB ثم في المثلث BAC

$$\tan \hat{B} = \frac{AD}{BD}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

تدريب صفحة 10:

- تأمل الشكل المرافق ثم أجب :



اكتب عبارتي $\sin \hat{B}$ و $\cos \hat{B}$

في المثلث ABC ثم في المثلث BHC

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{CH}{CB}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{CB}{AB}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{HB}{CB}$$

عبر عن $\tan \hat{A}$ بطريقتين.

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

و ذلك من المثلث ABC

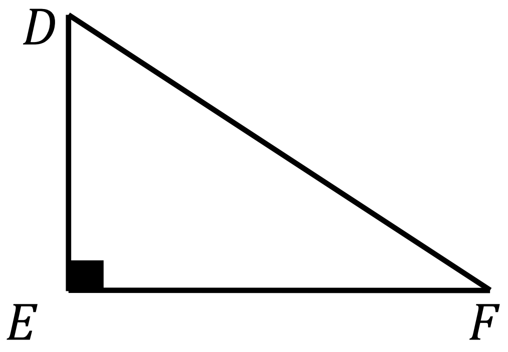
$$\tan \hat{A} = \frac{CH}{AH}$$

و ذلك من المثلث AHC

- DEF مثلث قائم في E.

ما الطولان اللازمان لحساب كل من $\cos \widehat{D}$

هما DE و DF



$\sin \widehat{D}$

هما FE و DF

$\tan \widehat{D}$.

هما FE و DE

اكتب كلاً من هذه النسب.

$$\cos \widehat{D} = \frac{DE}{DF} \ , \sin \widehat{D} = \frac{EF}{DF} \ , \tan \widehat{D} = \frac{EF}{DE}$$

في حالة $ED = 6\ cm$ و $EF = 8\ cm$ احسب طول الوتر

حسب نظرية فيثاغورث نكتب:

$$DF^2 = ED^2 + EF^2 = 36 + 64 = 100$$

$$DF = 10\ cm$$

احسب كلاً من $\sin \widehat{D} - \cos \widehat{D}$

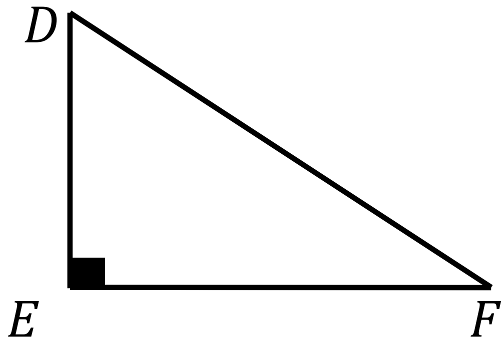
$$\cos \widehat{D} = \frac{DE}{DF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \widehat{D} = \frac{EF}{DF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

- ABC مثلث قائم في B.

ما الزاوية التي تجيبها يساوي $\frac{AB}{AC}$ ؟

إنها $\hat{A}$



ما الزاوية التي جيبها يساوي $\frac{AB}{AC}$ ؟

إنها $\hat{C}$

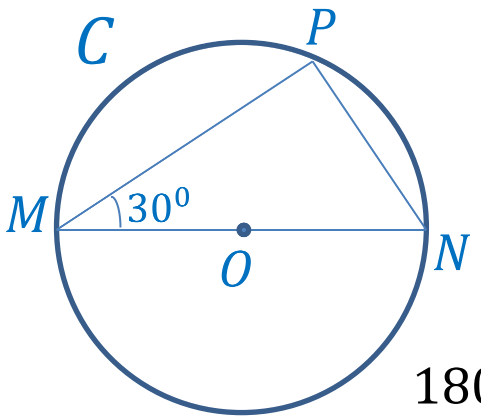
ما الزاوية التي ظلها يساوي $\frac{AB}{BC}$ ؟

إنها $\hat{C}$

- في الشكل المرافق الدائرة C التي طول قطرها $[MN]$ يساوي 12

و P نقطة منها تحقق $\widehat{PMN} = 30^0$

ما نوع المثلث MPN ؟ استنتج قياس الزاوية $\widehat{PNM}$



هو قائم الزاوية في P حيث إن هذه الزاوية محيطية تحصر نصف قوس الدائرة.

و بالتالي:

$\widehat{PNM} = 60^0$ لأن مجموع زوايا أي مثلث 180^0

ما نوع المثلث OPN ؟

هو مثلث متساوي الساقين حيث :

$$ON = OP = r$$

و بما أن أحد زواياه قياسها 60^0 و هو متساوي الساقين فهو إذاً متساوي الأضلاع.

احسب الطول PN ثم استنتج $sin\ 30^0$.

بما أن المثلث OPN متساوي الأضلاع إذاً:

$$PN = ON = OP = r = 6$$

في المثلث MPN نجد:

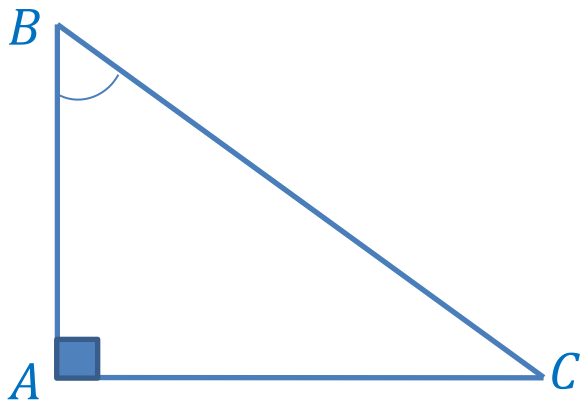
$$sin\ 30^0 = sin\widehat{PMN} = \frac{PN}{MN} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

دوماً يكون

$$sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$$

و دوماً النسب المثلثية لأي زاوية ثابتة لا تتغير.

نشاط صفحة 11:



- ABC مثلث قائم في A.

انسخ و أكمل :

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

استعمل مبرهنة فيثاغورث لكتابة علاقة بين أضلاع المثلث ABC

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

استنتج أن $(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2 = 1$

$$(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2}$$

$$(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2 = 1$$

احسب $\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ و استنتج أن $\tan\hat{B} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$.

$$\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$

تحقق من فهمك صفحة 12:

- مثلث قائم فيه θ قياس زاوية حادة و $\cos\theta = \frac{4}{5}$

ما المتطابقة التي تفيد في كتابة :

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

هي المتطابقة:

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

استنتج $\sin^2\theta$ ثم $\sin\theta$.

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

- ABC مثلث قائم في A $\sin \hat{B} = \frac{7}{25}$. احسب $\cos \hat{B}$. $\tan \hat{B}$

$$(\cos \hat{B})^2 + (\sin \hat{B})^2 = 1$$

$$(\cos \hat{B})^2 = 1 - \left(\sin \hat{B}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{625}{625} - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

$$\cos \hat{B} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{7}{24}$$

تدرب:

- ABC مثلث قائم في A $\tan \hat{B} = \frac{3}{4}$. احسب كلاً من $\sin \hat{B}$ و $\cos \hat{B}$.

$$\sin^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$$

نقسم الطرفين على $\cos^2\theta$ فنجد:

$$\tan^2\hat{B} + 1 = \frac{1}{\cos^2\hat{B}}$$

$$\frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{\cos^2\hat{B}}$$

$$\frac{1}{cos^2\hat{B}} = \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16}$$

$$cos^2\hat{B} = \frac{16}{25} \Rightarrow cos\hat{B} = \frac{4}{5}$$

$$tan\,\hat{B} = \frac{sin\,\hat{B}}{cos\,\hat{B}} \quad \Rightarrow sin\,\hat{B} = tan\,\hat{B} \times cos\,\hat{B} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

- θ قياس زاوية حادة تحقق $cos\,\theta = \frac{3}{5}$

استعمل المتطابقة

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

لحساب $sin\,\theta$

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sin^2\theta + \frac{9}{25} = 1$$

$$sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$sin\,\theta = \frac{4}{5}$$

اكتب $tan\,\theta$ بهيئة كسر مختزل.

$$tan\,\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

- ليكن θ قياس زاوية حادة $\cos\theta = \frac{5}{13}$ و $\tan\theta = \frac{12}{5}$

احسب قيمة جيب الزاوية θ بطريقتين.

الطريقة الأولى:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = \frac{12}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$$

الطريقة الثانية:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \frac{25}{169} = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

أتكفي معرفة $\cos\theta = \frac{5}{13}$ فقط لحساب $\sin\theta$ و $\tan\theta$ ؟ اشرح.

نعم ، تكفي

فكما رأينا في حل الطلب السابق يمكن معرفة $\sin\theta$ من معرفتنا $\cos\theta$

ثم بقسمة الجيب على التجيب يمكن معرفة الظل.

أتكفي معرفة $\tan\theta = \frac{12}{5}$ فقط لحساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ؟ اشرح.

نعم وفق الطريقة الآتية:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

نقسم الطرفين على $\cos^2\theta$ فنجد:

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

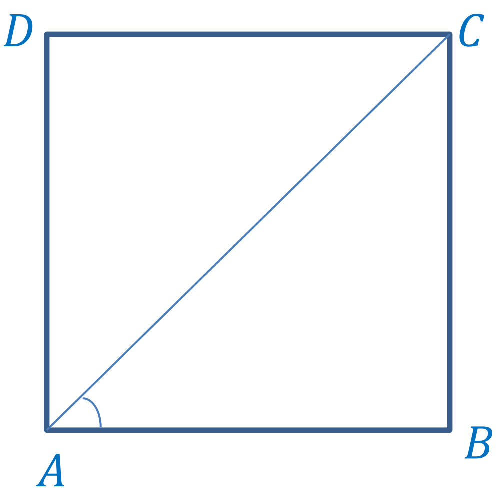
$$\frac{144}{25} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{144}{25} + \frac{25}{25} = \frac{169}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = \frac{12}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$$

- تحقق من فهمك صفحة 15:



$ABCD$ مربع ، طول ضلعه 1.

ما قياس الزاوية $\widehat{BAC}$

إن قطري المربع ينصفان زوايا الرؤوس

و بالتالي الزاوية المطلوبة قياسها 45^0.

احسب طول قطر المربع $[AC]$.

حسب نظرية فيثاغورث في المثلث القائم ABC :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

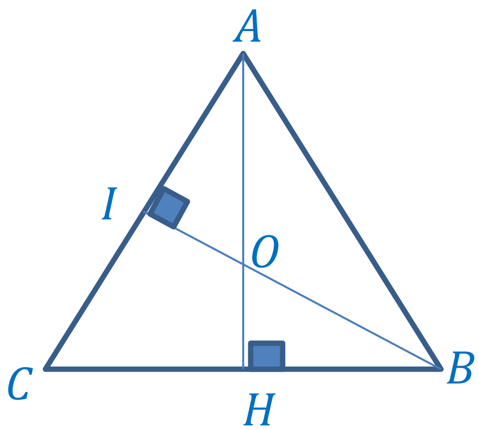
$$(AC)^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

- تدرب:

$[AH]$ و $[BI]$ ارتفاعان في مثلث ABC متساوي الأضلاع . طول ضلعه 1

ما قياس الزاوية $\widehat{ABH}$ ؟



بما أن المثلث ABC متساوي الأضلاع فقياس

هذه الزاوية 60^0.

احسب طول $[AH]$.

في المثلث القائم AHB :

$$\sin\widehat{ABH} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{1} \Longrightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

استنتج مساحة المثلث ABC.

مساحة المثلث = $\frac{\text{القاعدة}\times\text{الارتفاع}}{2}$

مساحة المثلث ABC = $\frac{CB\times AH}{2}$

مساحة المثلث ABC = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

ما قياس الزاوية $\widehat{OBH}$ ؟

نعلم أن الارتفاعات في المثلث متساوي الأضلاع هي منصفات لزوايا المثلث

و بالتالي الزاوية المذكورة قياسها 30^0

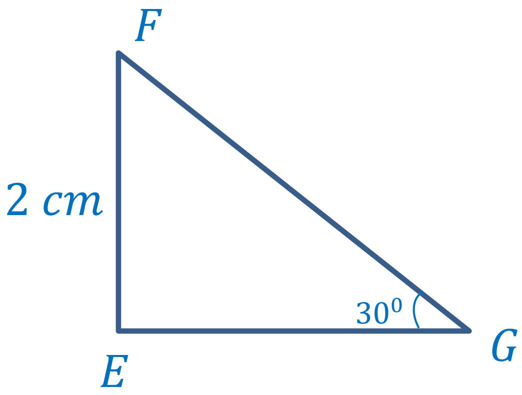
احسب طول $[OH]$.

نعلم أن الارتفاعات في المثلث متساوي الأضلاع تلتقي في نقطة واحدة تقسم هذه الارتفاعات بحيث يكون طول القطعة المستقيمة التي بدايتها هذه النقطة و نهايتها هي نقطة التقاء الارتفاع بضلع المثلث مساوياً ثلث طول الارتفاع

و بالتالي:

$$OH = \frac{AH}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

- تأمل الشكل المرافق ، ثم: احسب الطول FG بطريقتين.



الطريقة الأولى:

$$\sin 30^0 = \frac{FE}{FG} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{FG} = \frac{1}{2}$$

$$FG = 4\ cm$$

الطريقة الثانية:

$$\tan 30^0 = \frac{FE}{EG} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{GE} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow GE = 2\sqrt{3}\ cm$$

حسب نظرية فيثاغورث نكتب:

$$GE^2 + FE^2 = FG^2$$

$$12 + 4 = FG^2$$

$$16 = FG^2 \Rightarrow FG = 4\ cm$$

احسب الطول EG.

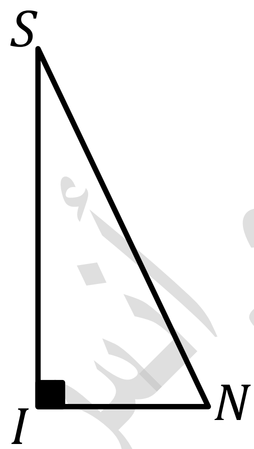
حل في الطلب السابق الطريقة الثانية.

تمرينات و مسائل صفحة 16

١-في كل حالة آتية هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة أشر إليها:

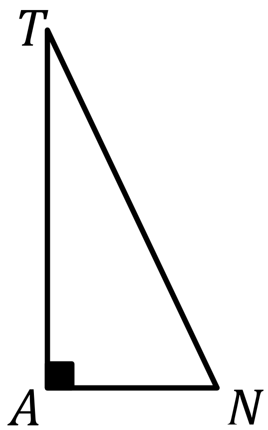
- في مثلث SIN قائم في I جيب الزاوية $\hat{S}$ يساوي:

$\frac{NI}{SI}$ $\qquad$ $\frac{SI}{NS}$ $\qquad$ $\frac{NI}{NS}$

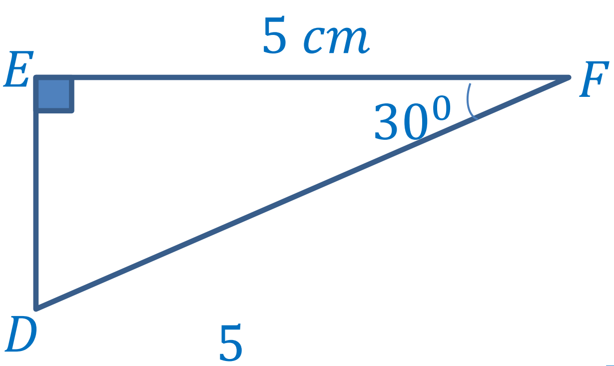


- في مثلث TAN قائم في A ظل الزاوية $\hat{T}$ يساوي:

$\frac{AN}{AT}$ $\qquad$ $\frac{TA}{TN}$ $\qquad$ $\frac{AN}{TN}$



- مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً ، طول الضلع DE هو:

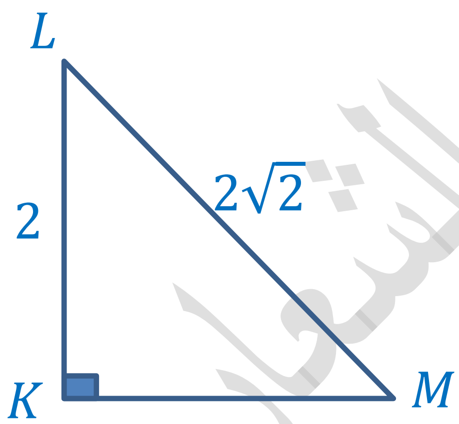


$2.5\ cm$ $\quad$ $5\sqrt{3}\ cm$ $\quad$ $\frac{5}{\sqrt{3}}\ cm$

$$\tan 30^0 = \frac{DE}{EF} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{DE}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow DE = \frac{5}{\sqrt{3}}\ cm$$

- مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً ، قياس الزاوية $\widehat{M}$ هو



60^0

60^0

45^0

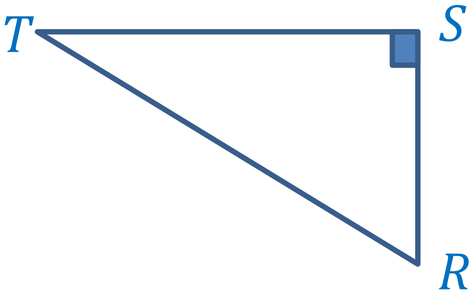
$$\sin \widehat{M} = \frac{KL}{LM} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و بالتالي:

$$\widehat{M} = 45^0$$

٢- في كل حالة من الحالات الآتية ، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات . أشر إلى كل إجابة صحيحة.

- في مثلث RST قائم في S الطول RT يساوي:



$ST \times \cos \hat{T}$

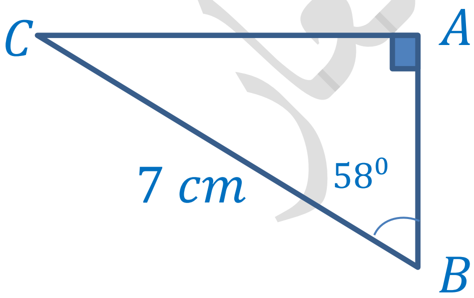
$\dfrac{ST}{\cos \hat{T}}$

$\dfrac{ST}{\sin \hat{R}}$

$$\sin \hat{R} = \frac{ST}{RT} \Longrightarrow RT = \frac{ST}{\sin \hat{R}}$$

$$\cos \hat{T} = \frac{ST}{RT} \Longrightarrow RT = \frac{ST}{\cos \hat{T}}$$

- مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً ، الطول AC يساوي:



$7 \times \cos 32^0$

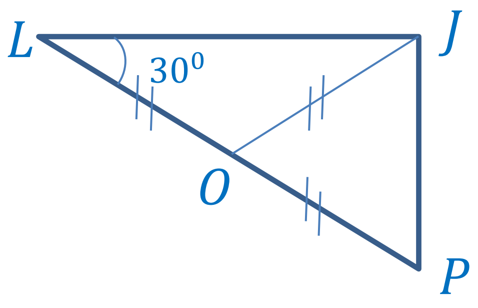
$\dfrac{7}{\sin 58^0}$

$7 \times \sin 58^0$

$$\sin 58^0 = \frac{CA}{CB} \Longrightarrow CA = CB \times \sin 58^0$$
$$= 7 \times \sin 58^0$$

$$\cos 32^0 = \frac{CA}{CB} \Longrightarrow CA = CB \times \cos 32^0$$
$$= 7 \times \cos 32^0$$

- LPJ فيه $\widehat{JLP} = 30^0$ و $LP = 12\ cm$



O نقطة من $[LP]$ تحقق

$OL = OP = OJ$

إذاً:

$\hat{P} = 60^0$

$JP = 6\ cm$

$\hat{J} = 90^0$

المثلث قائم الزاوية في J لأن $OL = OP = OJ$

و بالتالي $\hat{J} = 90^0$

$\hat{P} = 60^0$

$JP = 6\ cm$

لأن الضلع المقابلة للزاوية التي قياسها 30^0 في المثلث القائم طولها يساوي نصف طول الوتر.

٣- قل إن كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي و اشرح رأيك:

- جيب و تجيب زاوية حادة هو عدد محصور بين الصفر و الواحد.

صحيح فكلاهما حاصل قسمة طول ضلع قائمة على طول الوتر في مثلث قائم الزاوية و كلاهما عدد صحيح موجب و الأول أصغر من الثاني.

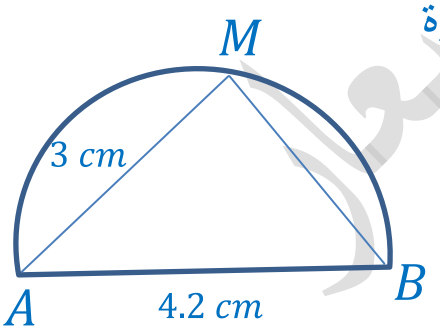
- ظل زاوية حادة هو عدد محصور بين الصفر و الواحد.

لا ليس صحيحاً ، فهو حاصل قسمة طول ضلع في مثلث قائم على طول ضلع آخر و بالتالي :

إن كان الأول أصغر من الثاني فالظل أصغر من الواحد

و إن كان يساويه فالظل يساوي الواحد (لأجل الزاوية 45^0).

و إن كان أكبر منه فالظل أكبر من الواحد.



- في الشكل المرافق $[AB]$ قطر في الدائرة

M نقطة منها . و $AB = 4.2\ cm$

و $AM = 3\ cm$

إذاً

$$cos\ \hat{A} = \frac{5}{7}$$

الزاوية $\widehat{M}$ قائمة لأنها محيطية تحصر نصف قوس الدائرة:

$$cos\ \hat{A} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4.2} = \frac{5}{7}$$

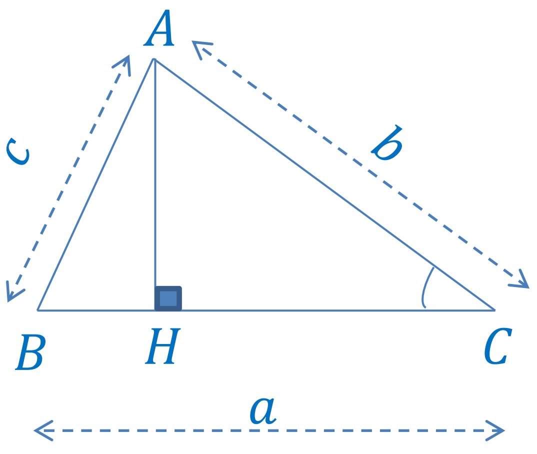
حيث ضربنا بسط و مقام الكسر $\frac{3}{4.2}$ بـ $\frac{5}{3}$ و المقولة صحيحة

- في الشكل (١) : نضع $AB = c$ و $BC = a$

و $CA = b$

عندئذ :

$$HA = b\sin\hat{C}$$



الشكل (١)

في المثلث AHC القائم

في H نجد:

$$\sin\hat{C} = \frac{HA}{b}$$

و بالتالي:

$$HA = b\sin\hat{C}$$

أي المقولة صحيحة.

- في الشكل (١) مساحة المثلث ABC هي:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}a \times b \times \sin\hat{C}$$

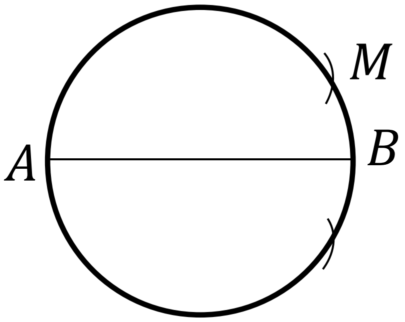
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times HA = \frac{1}{2} \times a \times b\sin\hat{C}$$

و المقولة صحيحة.

٤- دائرة مركزها O و نصف قطرها $3\ cm$ و $[AB]$ قطر في هذه الدائرة.

- وضع نقطة M على الدائرة بحيث يكون $AM = 5\ cm$



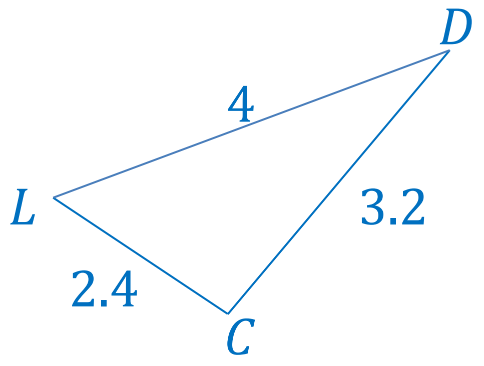
نفتح الفرجار بمقدار $5\ cm$
نغرز إبرته في A
نرسم قوساً
نقطتي تقاطع هذا القوس مع الدائرة
كل منهما تصلح أن تكون النقطة M.
(فوق القطر كما في الشكل أو تحته).

- ما طبيعة المثلث AMB؟ اشرح.

هو مثلث قائم الزاوية في M
فالزاوية $A\widehat{M}B$ هي زاوية محيطية و تحصر نصف قوس الدائرة.

هـ-

CDL مثلث أطوال أضلاعه كما في الشكل المرافق:



أثبت أن هذا المثلث قائم الزاوية

$$LC^2 = 5.76$$

$$CD^2 = 10.24$$

$$LC^2 + CD^2 = 16$$

$$LD^2 = 16$$

و بالتالي حسب النظرية العكس لنظرية فيثاغورث

(التي تنص على أنه إذا كان مربع طول ضلع في مثلث

يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

كان ذلك المثلث قائماً وتره تلك الضلع)

المثلث قائم وتره أكبر ضلع $[LD]$ أي هو قائم في C

- احسب كلاً من النسب المثلثية

$$\tan \hat{L} \quad , \sin \hat{L} \quad , \cos \hat{L}$$

$$\cos \hat{L} = \frac{LC}{LD} = \frac{2.4}{4} = \frac{24}{40} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\hat{L} = \frac{CD}{LD} = \frac{3.2}{4} = \frac{32}{40} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\hat{L} = \frac{CD}{LC} = \frac{3.2}{2.4} = \frac{32}{24} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

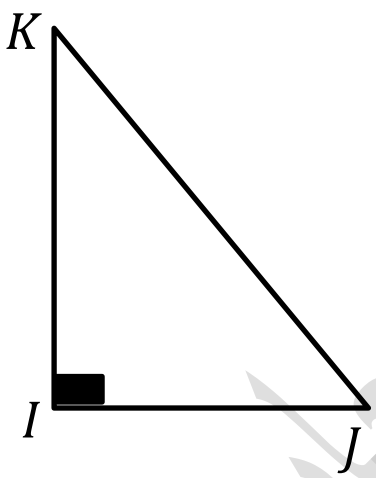
أو يمكن القول إن :

$$\tan\hat{L} = \frac{\sin\hat{L}}{\cos\hat{L}}$$

٦-

IJK مثلث قائم في I فيه $IJ = 9\ cm$ و $IK = 12\ cm$

احسب طول الوتر $[JK]$.



حسب نظرية فيثاغورث نكتب:

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2$$

$$JK^2 = 81 + 144 = 225$$

$$JK = \sqrt{225} = 15\ cm$$

عين مركز الدائرة المارة برؤوسه و احسب طول نصف قطرها.

المثلث القائم منتصف وتره هو مركز الدائرة المارة برؤوسه و وتره قطر في تلك الدائرة.

و بالتالي منتصف $[JK]$ هو مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث IJK و نصف قطرها هو نصف طول $[JK]$ أي:

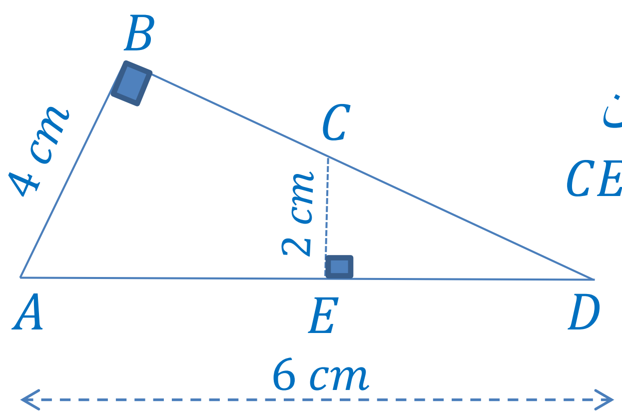
$$\frac{15}{2}\ cm = 7.5\ cm$$

٧-

تأمل الشكل المرافق ثم أجب:

اكتب عبارة $\sin \widehat{D}$ في كل من

المثلثين القائمين ABD و CED



في المثلث ABD:

$$\sin \widehat{D} = \frac{AB}{AD}$$

في المثلث CED:

$$\sin \widehat{D} = \frac{EC}{CD}$$

استنتج الطول CD

$$\sin \widehat{D} = \frac{AB}{AD} = \frac{EC}{CD}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{CD} \Longrightarrow CD = \frac{2 \times 6}{4} = 3\ cm$$

احسب الأطوال ED

حسب نظرية فيثاغورث في المثلث CED نكتب:

$$CD^2 = CE^2 + ED^2$$

$$9 = 4 + ED^2$$

$$ED = \sqrt{5}\ cm$$

و AE

$$AE = AD - ED = \left(6 - \sqrt{5}\,\right)cm$$

و BC

المثلثان ABD و CED متشابهان لأنهما قائمان و يشتركان بزاوية واحدة هي $\widehat{D}$

و من التشابه نكتب:

$$\frac{BD}{ED} = \frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD}$$

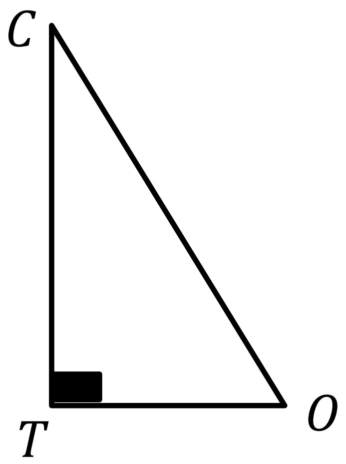
$$\frac{BD}{\sqrt{5}} = \frac{4}{2} = 2 \Longrightarrow BD = 2\sqrt{5}\,cm$$

$$BC = BD - CD = \left(2\sqrt{5} - 3\right)cm$$

٨- في المثلث TOC القائم في T :

$TC = 1.2\ cm \quad , OC = 1.3\ cm$

احسب الطول TO.



حسب نظرية فيثاغورث نكتب:

$$OC^2 = TC^2 + TO^2$$

$$1.69 = 1.44 + TO^2$$

$$TO^2 = 0.25$$

$$TO = \sqrt{0.25} = 0.5\ cm$$

احسب كلاً من النسب

$tan\ \hat{O} \quad , sin\ \hat{O} \quad , cos\ \hat{O}$

اكتب النواتج بكسور مختزلة.

$$cos\ \hat{O} = \frac{TO}{OC} = \frac{0.5}{1.3} = \frac{5}{13}$$

$$sin\ \hat{O} = \frac{TC}{OC} = \frac{1.2}{1.3} = \frac{12}{13}$$

$$tan\ \hat{O} = \frac{TC}{TO} = \frac{1.2}{0.5} = \frac{12}{5}$$

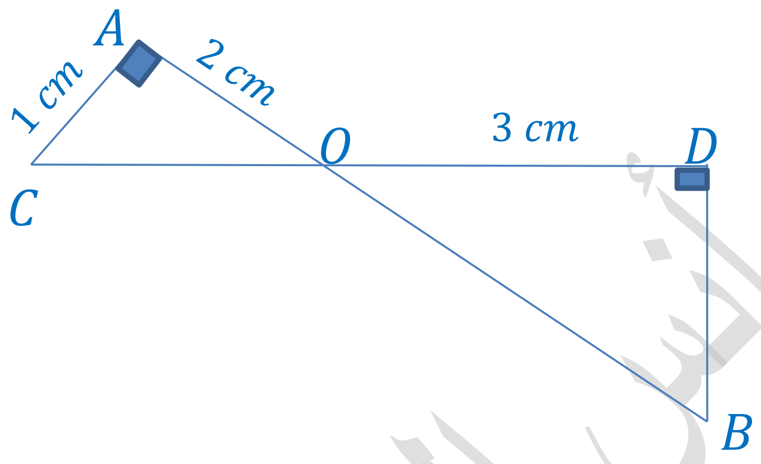
٩-

ارسم مثلثاً FGH قائم الزاوية في G بحيث يكون
$FH = 3\ cm$ و $FG = 6\ cm$ دون استعمال الكوس.

يوجد خطأ في التمرين حيث الوتر هو FH و لا يمكن أن
يكون طوله أصغر من طول الضلع القائمة $[FG]$

١٠-

في الشكل المرافق ، القطعتان $[AB]$ و $[CD]$ متقاطعتان
في O.



اشرح لماذا $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$.

بسبب التقابل بالرأس.

باعتماد :

$\tan \widehat{AOC}$ و $\tan \widehat{DOB}$ اشرح لماذا $\frac{1}{2} = \frac{DB}{3}$

$$\tan \widehat{AOC} = \frac{AC}{AO} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \widehat{DOB} = \frac{DB}{OD} = \frac{DB}{3}$$

و لكن : $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$ و بالتالي :

$$\tan \widehat{AOC} = \tan \widehat{DOB}$$

فيكون:

$$\frac{DB}{3} = \frac{1}{2}$$

احسب إذن الطول DB.

$$\frac{DB}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow DB = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5\ cm$$

- استعمل فرجاراً و كوساً مدرجاً لرسم الزاوية $x\widehat{O}y$ المحققة للشرط المرافق في الحالات الآتية (يمكن الاستغناء عن الكوس باستعمال مسطرة).

$$\cos x\widehat{O}y = \frac{2}{3}$$

نرسم مستقيمين متعامدين أفقي و عامودي يلتقيان في x باستخدام الكوس.

نفتح الفرجار بمقدار $2\ cm$ و نضع إبرته في x

نرسم قوساً يقطع المستقيم الأول في O

نفتح الفرجار بمقدار $3\ cm$ و نضع إبرته في O

نرسم قوساً يقطع المستقيم الثاني في y.

فيكون

$$\cos x\widehat{O}y = \frac{2}{3}$$

$$\sin x\widehat{O}y = \frac{5}{6}$$

نرسم مستقيمين متعامدين أفقي و عامودي يلتقيان في x باستخدام الكوس.

نفتح الفرجار بمقدار $5\ cm$ و نضع إبرته في x

نرسم قوساً يقطع المستقيم العامودي في y

نفتح الفرجار بمقدار $6\ cm$ و نضع إبرته في y

نرسم قوساً يقطع المستقيم الأفقي في O.

فيكون

$$\sin x\widehat{O}y = \frac{5}{6}$$

$$\tan x\widehat{O}y = \frac{2}{5}$$

نرسم بالكوس مستقيمين متعامدين أفقي و عامودي يلتقيان في x.

نفتح الفرجار بمقدار $2\ cm$ و نضع إبرته في x

نرسم قوساً يقطع المستقيم العامودي في y

نفتح الفرجار بمقدار $5\ cm$ و نضع إبرته في x

نرسم قوساً يقطع المستقيم الأفقي في O. فيكون

$$\tan x\widehat{O}y = \frac{2}{5}$$

-١٢

باستعمال كوس مدرج و منقلة ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A بحيث يكون $\widehat{ABC} = 30^0$ و $AB = 4\ cm$.

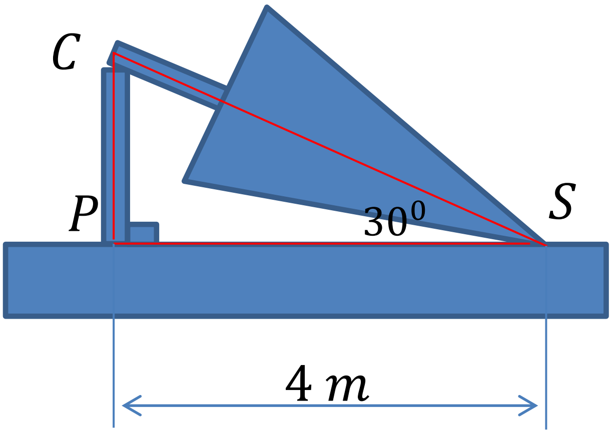
نرسم الزاوية القائمة $\widehat{BAC}$ التي رأسها A باستخدام الكوس ،

بالكوس المدرج نعين على أحد ضلعيها النقطة B على بعد $4\ cm$ من النقطة A

بالمنقلة نرسم $\widehat{ABC} = 30^0$

نقطة التقاء ضلع هذه الزاوية الذي لا تقع A عليه مع الضلع الآخر للزاوية $\widehat{BAC}$ الذي لا تقع B هي النقطة C.

١٣-
حساب ارتفاع شجرة:
الشكل المرافق تصوير
لشجرة
انكسرت بفعل عاصفة.
تأمل المعطيات المدونة
على الشكل ، ثم احسب
ارتفاع الشجرة عن
الأرض قبل العاصفة.



$$\tan\ 30^0 = \frac{PC}{PS}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{PC}{4} \Longrightarrow PC = \frac{4}{\sqrt{3}}\ m$$

$$\cos\ 30^0 = \frac{PS}{CS}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{CS} \Longrightarrow CS = \frac{8}{\sqrt{3}}\ m$$

ارتفاع الشجرة قبل العاصفة =

$$PC + CS = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\ m$$

-١٤

قياس ارتفاع واجهة مبنى :

لقياس الارتفاع HB لواجهة مبنى قام مهندس بالآتي:

اتخذ نقطة P في مستوى قاعدة المبنى على مسافة $5\ m$ عن النقطة B.

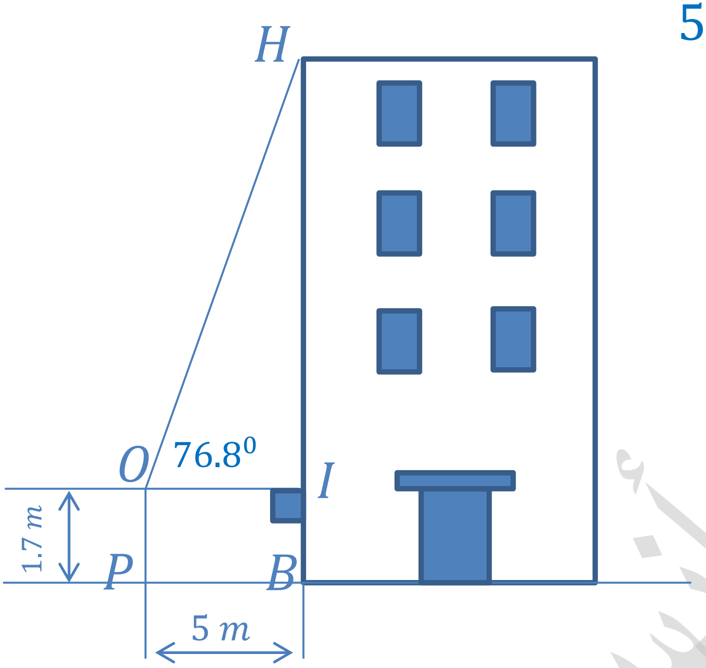
$(BP = 5\ m)$.

وضع جهاز رصد في النقطة O على ارتفاع $1.7\ m$ عن قاعدة المبنى $(OP = 1.7\ m)$ فوجد منها

$$I\widehat{O}H = 76.8^0$$

احسب ارتفاع هذا المبنى.

(علماً أن $tan\ 76.8^0 = 4.26$).



$$tan\ 76.8^0 = \frac{HI}{OI} = 4.26 \Rightarrow$$

$$HI = 4.26 \times OI$$

$$= 4.26 \times PB = 4.26 \times 5 = 21.3\ m$$

ارتفاع المبنى:

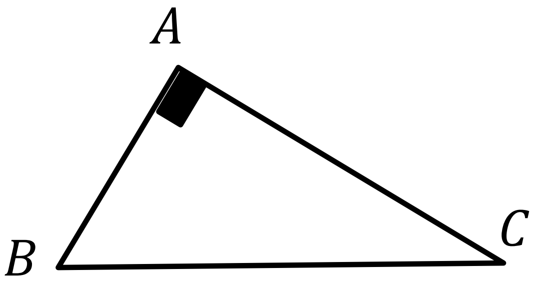
$$BI + IH = PO + IH = 1.7 + 21.3 = 23\ m$$

١٥-

متممة زاوية :

ABC مثلث قائم في A

اكتب عبارتي $\cos\hat{B}$, $\sin\hat{C}$



$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \qquad \sin\hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

اشرح إذاً لماذا $\cos\hat{B} = \sin(90^0 - \hat{B})$

$$\sin(90^0 - \hat{B}) = \sin\hat{C} = \cos\hat{B}$$

أثبت بشرح مماثل أن $\sin\hat{B} = \cos(90^0 - \hat{B})$

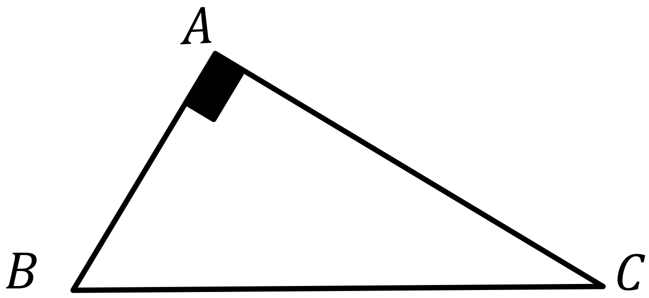
$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} \qquad \cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos(90^0 - \hat{B}) = \cos\hat{C} = \sin\hat{B}$$

-١٦

في كل من الحالات الآتية ABC مثلث قائم في A احسب:

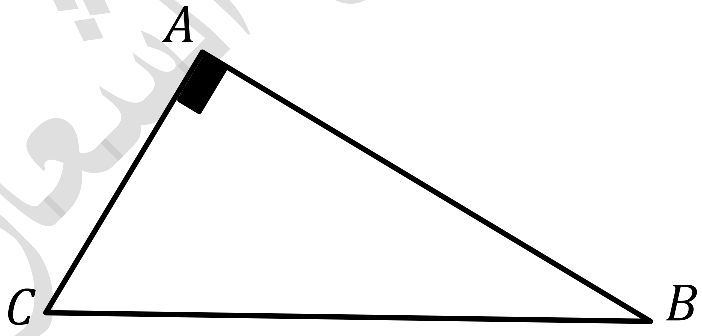
- الطول AB في حالة $BC = 7\ cm$ و $\sin \hat{C} = 0.4$.



$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

$$0.4 = \frac{AB}{7} \Longrightarrow AB = 0.4 \times 7 = 2.8\ cm$$

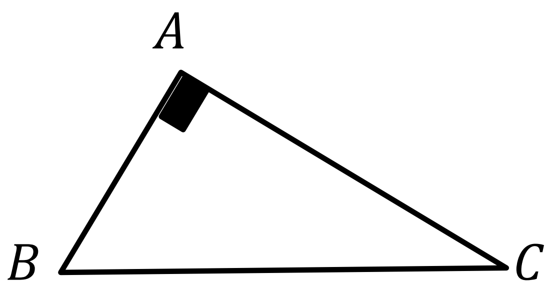
- الطول AC في حالة $AB = 8\ cm$ و $\tan \hat{B} = 0.5$.



$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$0.5 = \frac{AC}{8} \Longrightarrow AC = 0.5 \times 8 = 4\ cm$$

- الطول BC في حالة $AB = 3.2\ cm$ و $\cos \hat{B} = 0.4$.

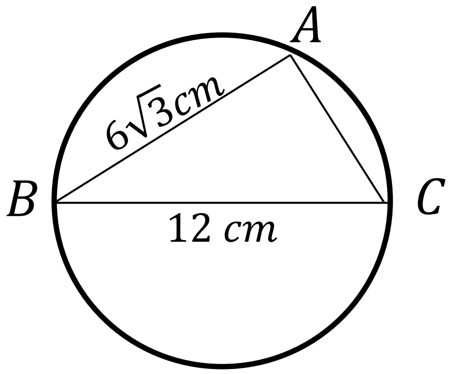


$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$0.4 = \frac{3.2}{BC} \Longrightarrow BC = \frac{3.2}{0.4} = 8\ cm$$

-١٧

- دائرة أحد أقطارها $[BC]$ طوله $12\ cm$.
ارسم هذه الدائرة و وضّع عليها نقطة A تحقق $BA = 6\sqrt{3}cm$.



بنفس فتحة الفرجار التي رسمنا بها الدائرة
نضع إبرته في C و نرسم قوساً يقطع الدائرة في A
و يكون $BA = 6\sqrt{3}cm$.

ما طبيعة المثلث ABC؟ برر إجابتك.

هو مثلث قائم الزاوية في A لأن الزاوية $\widehat{BAC}$ هي زاوية محيطية تحصر قوس نصف الدائرة.

احسب قياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

$$\frac{AB}{BC} = \cos \widehat{ABC} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي :

$$\widehat{ABC} = 30^0$$